I Soit f une fonction d'une variable réelle définie par

$$\rho \longrightarrow f(\rho) = \text{Log}(4 + \rho^2 - 4\rho\cos\theta)$$

où θ représente un nombre réel donné.

1° Étudier l'ensemble de définition E de f en fonction de la valeur de θ.

2° Démontrer que f est indéfiniment dérivable dans E.

Calculer $f'(\rho)$ et $f''(\rho)$. Prouver que la dérivée d'ordre n, $f^{(n)}(\rho)$ au point $\rho \in E$ se présente sous la forme :

$$f^{(n)}(\rho) = \frac{P_n(\rho)}{(4 + \rho^2 - 4\rho\cos\theta)^n}$$

où P_n est un polynôme dont on précisera le degré.

3° Donner, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la valeur au point ρ de la dérivée d'ordre $(n + 1)$ de la fonction :

$$\rho \longrightarrow g(\rho) = (4 + \rho^2 - 4\rho\cos\theta) f'(\rho) .$$

En déduire, pour tout $n \geqslant 1$ une relation entre

$$P_n(\rho) , \qquad P_{n+1}(\rho) , \qquad P_{n+2}(\rho) .$$

4° $\theta \in \mathbf{R}$ et $\rho \in E$ étant deux nombres réels donnés, trouver toutes les suites $\{u_n\}$ de nombres réels telles que

$$\forall n \geqslant 1 , \quad u_{n+2} = -(2\rho - 4\cos\theta) u_{n+1} - (4 + \rho^2 - 4\rho\cos\theta) u_n .$$

Donner celle de ces suites dont les deux premiers termes sont

$$u_1 = 2\rho - 4\cos\theta ; \qquad u_2 = -2\rho^2 + 8\rho\cos\theta - 8\cos 2\theta .$$

5° Expliciter complètement $P_n(\rho)$ pour n quelconque. Donner les valeurs de $P_n(0)$ et $f^{(n)}(0)$.

II 1° Démontrer que, pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, la fonction

$$\rho \longrightarrow \varphi_1(\rho) = \frac{1}{2e^{i\theta} - \rho}$$

est développable en série entière en ρ sous la forme

$$\varphi_1(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(\theta)\, \rho^n .$$

On donnera l'expression de $v_n(\theta)$ ainsi que le rayon de convergence de la série entière. Écrire de même le développement en série entière en ρ de la fonction :

$$\rho \longrightarrow \varphi_2(\rho) = \frac{1}{(2e^{-i\theta} - \rho)} .$$

2° Déduire des résultats précédents que la fonction f définie dans la partie I est développable en série entière en ρ, de rayon de convergence non nul. Écrire son développement et l'utiliser pour retrouver la valeur de $f^{(n)}(0)$ calculée au I.5°.

III A tout $n \in \mathbf{N}$, on associe l'intégrale

$$I_n(\rho) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\alpha}{4 + \rho^2 - 4\rho\cos\alpha}\, d\alpha$$

où $\rho \in]-2, +2[$ est un nombre réel donné.

1° Calculer $I_0(\rho)$ et $I_1(\rho)$.

2° Pour $n \geqslant 1$, trouver, en transformant l'expression :

$$(4 + \rho^2 - 4\rho\cos\alpha)\cos n\alpha$$

une relation entre $I_{n+1}(\rho)$, $I_n(\rho)$, $I_{n-1}(\rho)$.

3° Calculer alors $I_n(\rho)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

4° A tout $n \in \mathbf{N}$, et à tout $\rho \in]-2, +2[$, on associe l'intégrale

$$J_n(\rho) = \int_{-\pi}^{\pi} \text{Log}(4 + \rho^2 - 4\rho\cos\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha .$$

a. Calculer $J'_0(\rho)$, en admettant que

$$J'_0(\rho) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial\rho} \text{Log}(4 + \rho^2 - 4\rho\cos\alpha)\, d\alpha .$$

En déduire $J_0(\rho)$.

b. Calculer $J_n(\rho)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ en utilisant les résultats du III.3°.

5° Vérifier alors que, pour tout $\rho \in]-2, +2[$

$$\text{Log}(4 + \rho^2 - 4\rho\cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\rho)\cos n\theta$$

où $$a_0(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \text{Log}(4 + \rho^2 - 4\rho\cos\alpha)\, d\alpha$$

.../...

$$\forall n \geqslant 1 , \qquad a_n(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Log}(4 + \rho^2 - 4\rho\cos\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha$$

et montrer que

$$b_n(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Log}(4 + \rho^2 - 4\rho\cos\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha = 0 .$$

6° On pose, pour tout $k \in \mathbf{N}$

$$g_k(\theta) = \sum_{n=0}^{k} a_n(\rho) \cos n\theta .$$

Vérifier que

$$g_k(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Log}(4 + \rho^2 - 4\rho\cos\alpha) \frac{\sin\left[\frac{2k+1}{2}(\alpha - \theta)\right]}{\sin\frac{\alpha - \theta}{2}} d\alpha .$$

En déduire que

$$\operatorname{Log}(4 + \rho^2 - 4\rho\cos\theta) =$$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}}^{\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}} \operatorname{Log}(4 + \rho^2 - 4\rho\cos(\theta + 2u)) \frac{\sin(2k+1)u}{\sin u} du .$$

IV

Soit φ une fonction réelle d'une variable réelle définie, continue et dérivable sur $[0, a]$, où $a \in \mathbf{R}^+$.

1° m étant un entier strictement positif, on désigne par r_m le plus grand entier tel que

$$\frac{2\pi}{m} r_m \leqslant a .$$

Calculer la limite lorsque m tend vers l'infini de l'intégrale

$$\int_{\frac{2\pi}{m} r_m}^{a} \varphi(x) \sin mx \, dx .$$

2° Pour tout entier naturel $k < r_m$, on pose :

$$I_k = \int_{\frac{2k\pi}{m}}^{\frac{2(k+1)\pi}{m}} \varphi(x) \sin mx \, dx .$$

Montrer que

$$I_k = \frac{1}{m} \int_0^{\pi} \left[\varphi\left(\frac{u}{m} + \frac{2k\pi}{m}\right) - \varphi\left(\frac{u}{m} + \frac{(2k+1)\pi}{m}\right) \right] \sin u \, du$$

et vérifier la proposition suivante :

$$\forall \varepsilon > 0 , \qquad \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N} : (m \geqslant n_\varepsilon \Rightarrow |m I_k| \leqslant \pi\varepsilon) .$$

3° Prouver alors que

$$\lim_{m \to \infty} \int_0^a \varphi(x) \sin mx \, dx = 0 .$$

4° Appliquant le précédent résultat à la fonction F continue sur $[0, a]$ telle que

$$\forall x \in]0, a] , \qquad F(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}$$

démontrer que :

$$\lim_{m \to \infty} \int_0^a \varphi(x) \frac{\sin mx}{x} dx = \frac{\pi}{2} \varphi(0)$$

$$\left(\text{on admettra que : } \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2} \right) .$$

5° On suppose $a < \pi$. Appliquant le même résultat à la fonction G continue sur $[0, a]$, telle que :

$$\forall x \in]0, a] , \qquad G(x) = \varphi(x) \frac{x - \sin x}{x \sin x}$$

démontrer que

$$\lim_{m \to \infty} \int_0^a \varphi(x) \frac{\sin mx}{\sin x} dx = \lim_{m \to \infty} \int_0^a \varphi(x) \frac{\sin mx}{x} dx = \frac{\pi}{2} \varphi(0) .$$

6° Retrouver alors le dernier résultat du III.6°. pour tout

$$\theta \in]-\pi, +\pi[, \quad \text{puis pour} \quad \theta = \pi .$$

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail